Н. П. ГОРИН.

О сложении сил в пространстве Лобачевского.

(Статика на плоскости).

Для получения правил сложения сил приложенных к точке обычно делают следующие допущения:

1) Сила вполне определяется точкою приложения, направлением, стороною и величиной.

2) Силы действующие на точку имеют одну определенную равнодействующую.

3) Равнодействующая двух равных и противоположно направленных сил равна нулю.

4) Равнодействующая сил, приложенных к одной и той же точке и направленных по одной и той же прямой в одну и ту же сторону, равна их сумме и действует в ту же сторону.

5) Равнодействующая двух равных сил приложенных к точке направлена по биссектрисе угла образованного данными силами.

6) Равнодействующая есть непрерывная функция составляющих ее сил.

Исходя из этих положений решается задача о нахождении величины равнодействующей двух равных составляющих, а затем решение распространяется на случай сил неравных [1]).

В окончательной форме, независимо от поступлата Евклида, для плоскости получаются выражения:

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha \qquad У = P. \operatorname{Cos} \beta$$

где X и У две взаимно перпендикулярных составляющих силы P, приложенных к данной точке, а α и β углы X и У с силою P. Приэтом для плоскости:

$$\beta = 90 - \alpha$$

Для пространства выводятся аналогичные соотношения:

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha$$
$$У = P \operatorname{Cos} \beta$$
$$Z = P \operatorname{Cos} \gamma$$

где X, У и Z — три взаимно перпендикулярных составляющих силы P, а α, β и γ — их углы с равнодействующей.

[1]) См. напр. Poisson «Traité de Mecanique» v. I стр. 43—54.

Следует лишь заметить, что в неевклидовом пространстве X, У и Z, а в плоскости X и У — не являются проекциями силы P на три или два взаимно перпендикулярных направления. В дальнейшем при выводе правил сложения и приведения сил в плоскости пространства Лобачевского, мы пользуемся теми же основными допущениями и элементарными операциями над силами (перенос силы по линии действия, прибавление системы уравновешивающихся взаимно сил и т. д.), кои допускаются в Евклидовом пространстве.

Из многочисленной литературы, посвященной механике неевклидовых пространств, в нашем распоряжении имеется лишь:

1) Бонола «Неевклидова геометрия» [1])
2) Andrade «Leçons de mécanique physique»[2]).
3) Liebmann «Nichteuklidische Geometrie»[3]).
4) Юшкевич «Сложение сил в гиперболическом пространстве» [4])

---

§ 1. Силы сходящиеся в одной точке.

Если мы имеем силу P приложенную к точке 0, то, согласно приведенному выше правилу, составляющими ее по двум взаимно перпендикулярным прямым 0x и 0y будут силы X и У, определяемые из уравнений:

$$X = P \operatorname{Cos} \alpha \quad У = P \operatorname{Sin} \alpha \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

где α — угол силы P с осью 0x (см. рисунок № 1).

Пусть к точке 0 приложено n сил P_i где $i = 1, 2, \ldots n$. Каждая сила P_i может быть разложена по двум взаимно перпендикулярным направлениям 0x и 0y на составляющие:

$$X_i = P_i \operatorname{Cos} \alpha_i \qquad У_i = P_i \operatorname{Sin} \alpha_i$$

В результате сложения всех X_i и всех $У_i$ получим одну силу X, направленную по прямой 0x и одну силу У, направленную по прямой 0y:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_1^n P_i \operatorname{Cos} \alpha_i \\ У &= \sum_1^n P_i \operatorname{Sin} \alpha_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Из формул (1) получаем выражение для P в форме:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Обозначив равнодействующую сил P_i через P и ее угол с осью 0x через α, из уравнений (1) и (2) находим α и из уравнений (2) и (3) — величину силы P:

---

[1]) См. прибавление в конце этой книги.
[2]) См. Note II стр. 360—391. Изд. 1898 г.
[3]) См. стр. 123—126. Изд. 1923 г.
[4]) См. «Вестник опытной физики и элементарной математики» 1898 г. XXII семестр. № 10 и 11.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}\alpha &= \frac{\sum\limits_1^n P_i \operatorname{Cos}\alpha_i}{P} \\ \operatorname{Sin}\alpha &= \frac{\sum\limits_1^n P_i \operatorname{Sin}\alpha_i}{P} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$P = \sqrt{\left(\sum_1^n X_i\right)^2 + \left(\sum_1^n Y_i\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Отсюда следует, что: *формулы для отыскания величины и направления равнодействующей сил, приложенных к точке и расположенных в плоскости, остаются в пространстве Лобачевского такими же, как и в пространстве Евклида.*

Легко также по данным двум силам P_1 и P_2 и углу между ними ω найти величину равнодействующей P и ея углы с составляющими. Обозначим углы P с P_1 и P_2 соответственно через α_1 и α_2 (см. рисунок № 2).

Через точку приложения сил проводим две взаимно перпендикулярные прямые 0x и 0y полагая угол между 0x и P_1 равным φ. Тогда по формулам (1) и (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \operatorname{Cos}\varphi + P_2 \operatorname{Cos}(\omega+\varphi) &= P \operatorname{Cos}(\alpha_1+\varphi) \\ P_1 \operatorname{Sin}\varphi + P_2 \operatorname{Sin}(\omega+\varphi) &= P \operatorname{Sin}(\alpha_1+\varphi) \end{aligned}\right. \quad \ldots\ (A)$$

Или иначе:

$$P_1 \operatorname{Cos}\varphi + P_2 \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Cos}\varphi - P_2 \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Sin}\varphi = P \operatorname{Cos}\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi - \\ - P \operatorname{Sin}\alpha_1 \operatorname{Sin}\varphi$$

$$P_1 \operatorname{Sin}\varphi + P_2 \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}\varphi + P_2 \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Sin}\varphi = P \operatorname{Sin}\alpha_1 \operatorname{Cos}\varphi + \\ + P \operatorname{Cos}\alpha_1 \operatorname{Sin}\varphi$$

Умножая первое уравнение на $\operatorname{Sin}\varphi$, второе на $\operatorname{Cos}\varphi$ и вычитая одно из другого, получим:

$$P_2 = \frac{P \operatorname{Sin}\alpha_1}{\operatorname{Sin}\omega}$$

Подставляя вместо P_2 найденное выражение в любое из предыдущих уравнений, легко найдем:

$$P_1 = \frac{P \operatorname{Sin}\alpha_2}{\operatorname{Sin}\omega}$$

Об'единяя эти формулы, получим соотношение:

$$\frac{P_1}{\operatorname{Sin}\alpha_2} = \frac{P_2}{\operatorname{Sin}\alpha_1} = \frac{P}{\operatorname{Sin}\omega} \quad \ldots\ldots\ (6)$$

Возводя в квадрат правые и левые части уравнений (A) и складывая их имеем:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \operatorname{Cos}\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ (7)$$

По формулам (6) и (7) производится сложение и разложение сил в плоскости. Из формулы (5) имеем условия равновесия точки, находящейся под действием приложенных к ней сил:

$$\sum_1^n X_i = 0 \quad \sum_1^n У_i = 0 \quad . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

где X_i и $У_i$ суть составляющие сил P_i по двум перпендикулярным направлениям, проведенным через данную точку.

§ 2. Силы расходящиеся.

Положим, что мы имеем две силы P_1 и P_2, направленные по двум расходящимся прямым. Полагая, что мы можем переносить точку приложения силы по направлению ее действия, проводим к двум данным прямым общий перпендикуляр и точки его пересечения A_1 и A_2 с прямыми выберем за точки приложения сил (Рис. № 3). Полагаем, кроме того, что P_1 и P_2 действуют в одну и ту же сторону и что $P_1 =/= P_2$. Решаем задачу об определении равнодействующей. К точкам A_1 и A_2 прикладываем две равных и прямо противоположных силы R, направленных по прямой A_1 A_2. Величину R выбираем таким образом, чтобы равнодействующие R_1 и R_2 сил P_1 и R и сил P_2 и R пересеклись в некоторой точке 0. Это условие возможно выполнить следующим образом.

Углы α_1 и α_2 сил R с силами R_1 и R_2 определяются по формулам (6):

$$\frac{R}{\operatorname{Cos}\alpha_1} = \frac{P_1}{\operatorname{Sin}\alpha_1} \qquad \frac{R}{\operatorname{Cos}\alpha_2} = \frac{P_2}{\operatorname{Sin}\alpha_2} \quad . \; . \; . \; . \; (B)$$

Угол $A_1 0 A_2$ может быть найден по формуле:

$$\operatorname{Cos}\alpha = -\operatorname{Cos}\alpha_1 \, . \, \operatorname{Cos}\alpha_2 + \operatorname{Sin}\alpha_1 \, \operatorname{Sin}\alpha_2 \, . \, \operatorname{Ch}\frac{d}{k}$$

где $d = A_1 \, A_2$.

Чтобы R_1 и R_2 пересеклись—необходимо и достаточно:

$$-\operatorname{Cos}\alpha_1 \, . \, \operatorname{Cos}\alpha_2 + \operatorname{Sin}\alpha_1 \, . \, \operatorname{Sin}\alpha_2 \, . \, \operatorname{Ch}\frac{d}{k} < 1$$

Подставляя сюда выражения для Sinus'ов и Cosinus'ов углов α_1 и α_2 из формулы (B) получим:

$$\frac{P_1 \, . \, P_2 \, . \, \operatorname{ch}\frac{d}{k}}{\sqrt{(P_1^2 + R^2) \, . \, (P_2^2 + R^2)}} - \frac{R^2}{\sqrt{(P_1^2 + R^2) \; (P_2^2 + R^2)}} < 1$$

или:

$$P_1 \, . \, P_2 \, . \, \operatorname{ch}\frac{d}{k} - R^2 < \sqrt{(P_1^2 + R^2) \, . \, (P_2^2 + R^2)}$$

Возведя в квадрат обе части неравенства, имеем:

$$P_1^2 P_2^2 \,\mathrm{ch}^2 \frac{d}{h} - 2 P_1 P_2 \,\mathrm{sh} \frac{d}{k} \,.\, R^2 < R^2 (P_1^2 + P_2^2) + P_1^2 P_2^2$$

или:

$$P_1^2 P_2^2 \,\mathrm{sh}^2 \frac{d}{k} < R^2 \left(P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \,\mathrm{ch} \frac{d}{k} \right)$$

Отсюда в окончательной форме имеем:

$$R^2 > \frac{P_1^2 P_2^2 \,\mathrm{sh}^2 \frac{d}{k}}{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \,\mathrm{ch} \frac{d}{k}}.$$

При выборе R удовлетворяющем этому условию силы R_1 и R_2 пересекутся в некоторой точке 0.

Обозначим равнодействующую сил R_1 и R_2, а следовательно и равнодействующую сил P_1 и P_2 через P, а ея углы с R_1 и R_2 соответственно через β_1 и β_2, причем $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$.

Так как:

$$R = R_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 \quad \text{и} \quad R = R_2 \operatorname{Cos} \alpha_2$$

то:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\operatorname{Cos} \alpha_2}{\operatorname{Cos} \alpha_1}$$

и по формулам (6):

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\operatorname{Sin} \beta_2}{\operatorname{Sin} \beta_1}$$

Отсюда имеем соотношение:

$$\frac{\operatorname{Cos} \alpha_1}{\operatorname{Cos} \alpha_2} = \frac{\operatorname{Sin} \beta_1}{\operatorname{Sin} \beta_2}$$

Легко видеть, что это соотношение доказывает перпендикулярность P к $A_1 A_2$. Действительно, если опустить из вершины 0 треугольника A_1 0 A перпендикуляр на $A_1 A_2$ обозначив длину его через r и углы с R_1 и R_2 через γ_1 и γ_2, то из двух прямоугольных треугольников имеем:

$$\operatorname{Cos} \alpha_2 = \operatorname{Sin} \gamma_2 \,\mathrm{ch} \frac{r}{k} \qquad \operatorname{Cos} \alpha_1 = \operatorname{Sin} \gamma_1 \,\mathrm{ch} \frac{r}{k}$$

и далее:

$$\frac{\operatorname{Cos} \alpha_1}{\operatorname{Cos} \alpha_2} = \frac{\operatorname{Sin} \gamma_1}{\operatorname{Sin} \gamma_2}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\operatorname{Sin} \beta_1}{\operatorname{Sin} \beta_2} = \frac{\operatorname{Sin} \gamma_1}{\operatorname{Sin} \gamma_2}$$

Так как $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha$ и $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$ то получаем:

$$\frac{\operatorname{Sin} \beta_1}{\operatorname{Sin} (\alpha - \beta_1)} = \frac{\operatorname{Sin} \gamma_1}{\operatorname{Sin} (\alpha - \gamma_1)}$$

После элементарных упрощений отсюда следует, что:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \gamma_1$$

Так как β_1 и γ_1 во всяком случае менее π, то $\beta_1 = \gamma_1$ и $\beta_2 = \gamma_2$, т. е. направление P совпадает с направлением перпендикуляра к $A_1 A_2$. Определим теперь величину силы P.

Пусть отрезки, отсекаемые силою P на стороне $A_1 A_2$ будут соответственно $A_1 0_1 = d_1$ и $A_2 0_1 = d_2$. Тогда из треугольника $A_1 0 A_2$ и треугольника $A_1 0 0_1$ имеем:

$$\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{sh} \frac{d}{k}} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_2}{\operatorname{sh} \frac{A_1 0}{k}} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_2 \cdot \operatorname{Sin} \alpha_1}{\operatorname{sh} \frac{r}{k}}$$

Вследствие соотношения между элементами прямоугольного треугольника $A_1 00_1$:

$$\frac{\operatorname{Sin} \alpha_1}{\operatorname{sh} \frac{r}{k}} = \frac{\operatorname{Sin} \beta_1}{\operatorname{sh} \frac{d_1}{k}}$$

получим:

$$\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{sh} \frac{d}{k}} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_2 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1}{\operatorname{sh} \frac{d_1}{k}}$$

Отсюда на основании формул (1) примененных к силам P_2 и R_2 находим:

$$\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{sh} \frac{d}{k}} = \frac{P_2 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1}{R_2 \operatorname{sh} \frac{d_1}{k}}$$

и

$$\operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sh} \frac{d}{k} \cdot \frac{P_2 \operatorname{Sin} \beta_1}{R_2 \operatorname{sh} \frac{d_1}{k}}$$

Подставляя выражение для $\operatorname{Sin} \alpha$ в формулу:

$$\frac{P}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{R_2}{\operatorname{Sin} \beta_1}$$

окончательно получим:

$$\frac{P}{\operatorname{sh} \frac{d}{k}} = \frac{P_2}{\operatorname{sh} \frac{d_1}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

Аналогичным образом выведем, что:

$$\frac{P}{\operatorname{sh} \frac{d}{k}} = \frac{P_1}{\operatorname{sh} \frac{d_2}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

и об'единяя эти соотношения имеем:

$$\frac{P}{\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}} = \frac{P_1}{\mathrm{Sh}\,\frac{d_2}{k}} = \frac{P_2}{\mathrm{Sh}\,\frac{d_1}{k}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

По формулам (11) определяется и величина P и отрезки d_1 и d_2, принимая во внимание, что $d_1 + d_2 = d$.

В силу последнего соотношения между d, d_1 и d_2 имеем:

$$\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k} = \mathrm{Sh}\,\frac{d_1}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_2}{k} + \mathrm{Sh}\,\frac{d_2}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k}$$

Подставляя выражение для $\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}$ хотя бы в формулу (10) и принимая во внимание формулы (11), получаем выражение для P:

$$P = P_1\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k} + P_2\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_2}{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Выражение для *P* в зависимости лишь от данных P_1, P_2 и d, можно получить непосредственно. В том случае, когда две прямых имеют общий перпендикуляр, т. е. являются расходящимися, Cos ω переходит в $\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}$ [1])

Тогда из формулы (7) получаем:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1\,P_1\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Из хода доказательства и построения кроме того следует, что сила P направлена в ту же сторону, что и силы P_1 и P_2. Таким образом имеем вывод:

Равнодействующая двух расходящихся и одинаково направленных сил будет перпендикулярна к их общему перпендикуляру и направлена в ту же сторону; точка приложения и величина ее определяется формулами (11) и (12).

В том случае когда $P_1 = P_2$ из формул (11) и (12) получаем:

$$d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$$

$$P = 2\,P_1\;\mathrm{Ch}\,\frac{d}{2k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

т. е. *равнодействующая двух равных расходящихся и одинаково направленных сил перпендикулярна к их общему перпендикуляру, делит его пополам и одинаково направлена с данными силами; величина ее определяется по формуле (14).*

---

[1]) См. например Killing „Die Nicht—euklidische Raumformen“ изд. 1885 г страница 23.

Рассмотрим теперь случай двух неравных, расходящихся и противоположно направленных сил. Пусть точки приложения этих сил взяты на их общем перпендикуляре и пусть $P_1 > P_2$ (рис. № 4). Так как $\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}$ всегда больше единицы, то равнодействующая двух расходящихся и одинаково направленных сил согласно формуле (12) всегда больше их суммы, а следовательно больше каждой из них и в отдельности. Поэтому в рассматриваемом случае силу P_1 можно считать равнодействующей двух расходящихся сил, из которых одна по величине равна силе P_2, приложена в той же точке и направлена в противоположную сторону; вторая же сила P нам пока неизвестна, точно так же, как и точка ее приложения.

Определив величину P и ее точку приложения мы и решим поставленную задачу. Пусть A_1 и A_2 точки приложения сил P_1 и P_2, A_1A_2—их общий перпендикуляр, $A_1A_2 = d$, 0_1— точка приложения силы P, которая и будет равнодействующей сил P_1 и P_2. Обозначив 0_1A_1 через d_1 и 0_1A_2 через d_2, причем $d_2 = d + d_1$, по формулам (11) имеем:

$$\frac{P}{\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}} = \frac{P_1}{\mathrm{Sh}\,\frac{d_2}{k}} = \frac{P_2}{\mathrm{Sh}\,\frac{d_1}{k}} \quad \ldots\ldots (15)$$

Принимая во внимание что теперь

$$\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k} = \mathrm{Sh}\,\frac{d_2}{k}\,.\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k} - \mathrm{Sh}\,\frac{d_1}{k}\,.\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_2}{k}$$

из формул (15) найдем для *P* выражение:

$$P = P_1\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k} - P_2\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_2}{k} \quad \ldots\ldots (16)$$

Найдем теперь выражение для d_1 через P_1, P_2 и d. Из формулы (15) имеем:

$$P_1\,\mathrm{Sh}\,\frac{d_1}{k} = P_2\left(\mathrm{Sh}\,\frac{d_1}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k} + \mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k}\right)$$

$$P_1 = P_2\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k} + P_2\,\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}\,.\,\mathrm{Ctg\,h}\,\frac{d_1}{k}$$

А отсюда:

$$\mathrm{tgh}\,\frac{d_1}{k} = \frac{P_2\,\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}}{P_1 - P_2\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}} \quad \ldots\ldots (17)$$

Для того, чтобы разложение сил P_1 было возможно необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{tgh}\,\frac{d_1}{k}$ был меньше единицы т. е.

$$P_2 \operatorname{Sh} \frac{d}{k} < P_1 - P_2 \operatorname{Ch} \frac{d}{k}$$

$$P_2 \left(\operatorname{Sh} \frac{d}{k} + \operatorname{Ch} \frac{d}{k}\right) < P_1$$

Отсюда окончательно находим:

$$e^{\frac{d}{k}} < \frac{P_1}{P_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

При условии (18) силы P_1 и P_2 будут иметь равнодействующую P и мы имеем теорему:

Равнодействующая двух расходящихся неравных и противоположно направленных сил перпендикулярна к их общему перпендикуляру лежит за большей силой и направлена в ту же сторону; величина ее и точка приложения определяются по формулам (15).

В том случае когда при $P_1 \neq P_2$ имеем

$$e^{\frac{d}{k}} = \frac{P_1}{P_2}$$

и

$$\operatorname{tgh} \frac{d_1}{k} = 1$$

т. е. $d_1 = \infty$, а следовательно точка приложения силы P становится бесконечно удаленной; в то же время из формул (15) получаем, что $P = 0$.

Если же

$$e^{\frac{d}{k}} > \frac{P_1}{P_2}$$

то точка приложения равнодействующей падает в идеальную область гиперболической плоскости.

В этих последних двух случаях равнодействующей сил P_1 и P_2 не существует. На этом обстоятельстве мы остановимся еще когда будем рассматривать вопрос о приведении сил в плоскости. Для величины силы P в случае расходящихся и противоположно направленных сил будем иметь формулу аналогичную формуле (13):

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2 P_1 P_2 \operatorname{Ch} \frac{d}{k}} \quad \ldots\ldots (19)$$

§ 3. Силы параллельные.

Для двух сил сходящихся в одной точке мы имеем формулы (6) и (7). В том случае если силы P_1 и P_2 параллельны и направлены так, что угол между ними $\omega = 0$ (т. е. обе силы направлены к бесконечно удаленной точке или от нея) то из формулы (7) мы получаем:

$$P = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Этот же самый результат мы получим из формулы (13) полагая $d = 0$. Определим теперь положение равнодействующей P. (Рис. № 5). Возьмем две сходящихся в точке 0 силы P_1 и P_2 и пусть P—их равнодействующая. Из точки 0 произвольным радиусом опишем окружность пересекающую P_1, P_2 и P соответственно в точках A, B и C. Пусть далее d_1 и d_2 длины перпендикуляров опущенных из C на 0A и 0B.

Тогда имеем
$$\mathrm{Sh}\frac{d_1}{k} = \mathrm{Sh}\frac{0c}{k} \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha_1$$
$$\mathrm{Sh}\frac{d_2}{k} = \mathrm{Sh}\frac{0c}{k} \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha_2$$

где α_1 и α_2 — углы P с P_1 и P_2 и $\alpha_1 + \alpha_2 = \omega$.

Из этих формул и формул (6) получаем:
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\mathrm{Sh}\frac{d_2}{k}}{\mathrm{Sh}\frac{d_1}{k}}$$

Если силы P_1 и P_2 становятся параллельными, точка 0 удаляется в бесконечность, $\omega = 0$ и окружность переходит в предельную линию. Дуги $AC = S_1$ и $BC = S_2$ будут дугами предельной линии.

Между S_1 и S_2 и соответствующими им d_1 и d_2 имеем соотношение: [1])
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\mathrm{Sh}\frac{d_1}{k}}{\mathrm{Sh}\frac{d_2}{k}}$$

Откуда:
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Имеем вывод: *равнодействующая двух парралельных и одинаково направленных сил равна их сумме, действует в ту же сторону и делит дугу предельной линии на части обратно пропорциональные составляющим силам.*

В том случае когда параллельные силы противоположно направлены т. е. $\omega = 180^\circ$ из формулы (7) или при $d = 0$ из формулы (19) находим:
$$P = P_1 - P_2 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Полагая что $P_1 > P_2$ пересечем силы некоторой предельной линией и точки их приложения выбираем в точках A и B пересечения сил с предельной кривой (рис. № 6).

---

[1]) См. например Успенский «Введение в Неевклидову геометрию. Лобачевского-Балиай» стр. 128. Изд. 1922 г.

Силу P_1 можно рассматривать как равнодействующую двух параллельных и одинаково направленных с нею сил P и P_2 причем P будет лежать за большей силой — P_1 и определится по формуле (22). Пусть точка пересечения P с предельной линией будет C и дуги AB, AC и BC имеют длины S, S_1 и S_2. Тогда на основании формулы (21) имеем:

$$\frac{P}{P_2}=\frac{S}{S_1}$$

$$\frac{P+P_2}{P_2}=\frac{S+S_1}{S_1}$$

А отсюда снова находим:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{S_2}{S_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

т. е. *равнодействующая двух параллельных и противоположно направленных сил равна их разности, лежит за большей силой, направлена в ту же сторону, что и большая сила и делит дугу предельной линии внешним образом на части обратно пропорциональные составляющим силам.*

§ 4. Пара в плоскости.

Парой мы будем называть совокупность двух равных расходящихся и противоположно направленных сил. Расстояние между прямыми, по которым направлены силы будем называть *плечем* пары, а средину плеча—центром пары.

Рассмотрим пару (P_1) с плечем $2d_1$ и центром 0_1. Через центр 0_1 проводим прямую $A_1 B_1$ под углом α к плечу AB (см. рис. № 7) и в точках A_1 и B_1 отстоящих от 0_1 также на расстоянии d_1 приложим по две силы равных P_1 и противоположно направленных по перпендикулярам к $A_1 B_1$. Таким образом $AP_1 = BP_1 = B_1P_1 = B_1P'_1 = A_1P_1 = A_1P'_1$. Четыре вновь введенных силы уничтожаются и поэтому наша система сил эквивалентна первоначально взятой паре. При проведении прямой $A_1 B_1$ может представиться три случая. Первый случай—когда угол α таков, что $\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k}<\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}}$ и в этом случае прямые B_1P_1 и BP_1 а также и две других прямых AP_1 и $A_1P'_1$ пересекаются. Второй случай — когда $\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k}$ равен единице деленной на $\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}$ и тогда эти пары прямых параллельны. В том случае когда

$$\mathrm{Ch}\,\frac{d_1}{k}>\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}}$$

прямые $B_1 P_1$ и BP_1 а также прямые AP_1 и $A_1 P'_1$ расходятся.

Рассмотрим первый случай. Пусть $B_1 P_1$ и $B P_1$ пересекаются в точке М. Тогда, вследствие равенства прямоугольных треугольников $0_1 BM$ и $0_1 B_1 M$ по гипотенузе и катету, прямая $0M$ будет биссектрисой угла α. Равнодействующая же двух равных сил P_1 и пересекающихся в точке М будет направлена по биссектрисе угла BMB_1 т. е. по той же прямой $0_1 M$ в сторону от 0_1 к М. Совершенно аналогично равнодействующая сил AP_1 и $A_1 P'_1$ будет также направлена по биссектрисе угла α, но в противоположную сторону. Так как обе эти равнодействующие кроме того равны по величине, то они взаимно уничтожаются и вместо первоначально взятой пары мы получаем другую пару с тем же плечем, но повернутую около центра на некоторый угол α.

В случае параллельности BP_1 и B_1P_1 биссектриса угла α разделит пополам отрезок BB_1 в точке М и будет ему перпендикулярна. На основании свойств предельной линии, соответствующей осям BP_1 и B_1P_1 и проходящей через точки B и B_1, мы заключаем, что прямая $0M$ параллельна BP_1 и B_1P_1 и разделит дугу предельной линии пополам. В силу же теоремы о сложении двух параллельных сил заключаем, что равнодействующая двух рассматриваемых сил равна $2P_1$ и направлена по биссектрисе угла α в сторону $0M$. Силы же AP_1 и $A_1P'_1$ дадут также равнодействующую $2P_1$, направленную по той же прямой, но в противоположную сторону. В результате имеем пару с теми же силами и тем же плечем, но повернутую около центра на угол α. (См. рис. № 8)..

Не трудно убедиться в справедливости этого заключения и для такого угла α когда силы BP_1 и B_1P_1 становятся расходящимися (рис. № 9).

Различие заключается лишь в том, что биссектриса угла α теперь будет делить пополам общий перпендикуляр прямых BP_1 и B_1P_1 и будет к нему перпендикулярна. Таким образом имеем следующий вывод. *Не изменяя состояния твердого тела можно пару повернуть в ее плоскости на какой угодно угол вокруг ея центра.*

Рассмотрим далее пару P_1 с плечем $2d$. В центре пары приложим две равных и прямо-противоположных силы P, перпендикулярных к плечу пары P_1 (рис. № 10). Сложив направленные в одну и ту же стотону силы P и P_1 мы получим силу P_2 перпендикулярную к плечу пары P_1. Величина и положение P_2 определяется по формулам:

$$\frac{P_2}{\operatorname{Sh}\frac{d_1}{k}} = \frac{P_1}{\operatorname{Sh}\frac{d_2}{k}} = \frac{P}{\operatorname{Sh}\frac{d_1 - d_2}{k}}.$$

Таким образом вместо пары P_1 мы получим эквивалентную ей пару P_2, причем из написанных выше формул следует:

$$P_2 \operatorname{Sh} \frac{d_2}{k} = P_1 \operatorname{Sh} \frac{d_1}{k} \quad \ldots \ldots \ldots (24)$$

т. е. *не изменяя состояния твердого тела у пары можно менять плечо при условии, если центр пары и произведение из силы пары на синус гиперболической половины плеча остается неизменным.*

По аналогии с Евклидовой статикой мы можем ввести понятие момента пары. Моментом пары мы будем называть вектор $0g$: 1) по величине равный удвоенному произведению силы пары на синус гиперболической половины плеча; 2) перпендикулярный к плоскости пары и приложенный к ее центру; 3) направленный так, что прямая соедин.ющая центр 0 с точкой двигающейся по направлению вектора P вращается в положительном направлении вокруг вектора $0g$. (Рис. № 11).

При изложенных выше преобразованиях пары момент ее оставался неизменным. Легко видеть, что мы не можем передвигать пары вдоль ея плеча, что имеет место в Евклидовой плоскости. Действительно, пусть мы имеем пару (PP') и на продолжении ея плеча AB выбираем отрезок $A_1B_1 = AB$ и в точках A_1 и B_1 прикладываем по две равных, прямо-противоположных и перпендикулярных к AB силы $P = P'$. (Рис. № 12). Складывая силы AP и B_1P, направленные в одну сторону, получим силу: R_1, направленную в ту же сторону:

$$R_1 = 2P \operatorname{Ch} \frac{AC}{k}$$

Складывая же силы BP' и A_1P' направленные в другую сторону, получим R_2, направленную в одну с ними сторону:

$$R_2 = 2P' \operatorname{Ch} \frac{BC}{k}$$

Обе эти силы приложены к одной и той же точке C — средине отрезков AB_1 и A_1B, перпендикулярны к AB и направлены в противоположные стороны. В результате их сложения мы получим силу:

$$R = 2P\left(\operatorname{Ch} \frac{AC}{k} - \operatorname{Ch} \frac{BC}{k}\right)$$

и пару (PP') с плечем $A_1B_1 = AB$ с центром в точке 0_1 Так как:

$$\operatorname{Ch}\left(\frac{-d}{k}\right) = \operatorname{Ch} \frac{d}{k}$$

то при $AC > BC$ сила R направлена в одну сторону, при $AC = BC$ имеем $R = 0$ и получаем прежнюю пару, при $AC < BC$ сила R направлена в противоположную сторону. Таким образом вновь полученная пара не может быть эквивалентной первоначально взятой хотя и плечо и силы пар остались неизменными. Передвигая пару вдоль ее плеча мы оставляем неизменной лишь величину момента, точка же приложения этого вектора и прямая, по которой он направлен, меняются. Это будет происходить при всех преобразованиях пары, связанных с изменением ея центра. Следовательно, в противоположность Евклидовой статике, здесь мы лишь можем производить такие преобразования пары при которых остаются неизменными ее центр и величина момента. Принимая же во внимание определение момента, можем сказать: *в гиперболической плоскости возможны такие преобразования пары, при которых момент ее остается неизменным.*

Пусть в плоскости мы имеем несколько пар P_i с одним и тем же центром и плечем r_i. Момент всякой такой пары будет:

$$M_i = 2\,P_i\ \mathrm{Sh}\,\frac{r_i}{k}$$

Так как все эти пары можно привести к одному и тому же плечу r с силами P_i' причем:

$$M_i = 2\,P_i\,\mathrm{Sh}\,\frac{r_i}{k} = 2\,P_i'\ \mathrm{Sh}\,\frac{r}{k}$$

и так как кроме того поворотом около общего центра все плечи можно привести в совмещение, то путем сложения сил P_i' мы получим одну пару с силою:

$$P = \Sigma\,P_i'$$

и общим плечом r. Момент этой пары будет:

$$M = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{r}{k}\,\Sigma\,P_i'$$

Принимая во внимание выражение для M_i, имеем:

$$M = \Sigma\,M_i$$

Следовательно: *совокупность пар в плоскости с общим центром может быть заменена одной парой, момент которой равен сумме моментов составляющих пар.*

§ 5. Приведение сил в плоскости.

Рассмотрим вопрос о замене данной силы силою и парой. Пусть мы имеем силу P и хотим заменить ее некоторой силой приложенной в данной точке 0 и парой с заданным плечем 2d. Из точки 0 опускаем перпендикуляр 0A на силу P и точку приложения P выбираем в A (см. рис. № 13). Положим для определенности что $0A = r$ и что $r > d$. Разложим силу P на две силы приложенных в точках B и C прямой 0A и ей перпендикулярных, причем $0B = 0C = d$ и 0 есть средина отрезка BC. Пусть эти силы будут X и У и при предположении $r > d$ сила X направлена в ту же сторону, что и P, а сила У в противоположную. На основании формул (15) имеем:

$$\frac{P}{\mathrm{Sh}\,\frac{2d}{k}} = \frac{X}{\mathrm{Sh}\,\frac{r+d}{k}} = \frac{У}{\mathrm{Sh}\,\frac{r-d}{k}}$$

И отсюда:

$$\left.\begin{aligned} X &= P\,\frac{\mathrm{Sh}\,\frac{r+d}{k}}{\mathrm{Sh}\,\frac{2d}{k}} \\ У &= P\,\frac{\mathrm{Sh}\,\frac{r-d}{k}}{\mathrm{Sh}\,\frac{2d}{k}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

Из формул (25) следует что $X > У$. В точке C по направлению силы У и прямо противоположному приложим силы Z, а силу X будем рассматривать как сумму двух сил: $(У + Z)$ и $X - (У+Z)$. Тогда силы $(У+Z)$ приложенные в точках B и C и противоположно-направленные образуют пару, а силы Z и $X - (У + Z)$, направленные в одну сторону и перпендикулярные к 0A, могут быть заменены одной силой направленной в ту же сторону и также перпендикулярной к 0A. Определим Z таким образом, чтобы равнодействующая двух последних сил приложена была к точке 0.

Из формул (11) в этом случае имеем:

$$\frac{R}{\mathrm{Sh}\,\frac{2d}{k}} = \frac{Z}{\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}} = \frac{X-(У+Z)}{\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}}$$

Отсюда находим, что:

$$Z = \frac{1}{2}\,(X - У)$$

$$R = (X - У)\ \mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}$$

Подставляя сюда выражения для X и У из формул (25), получаем:

$$R = \frac{P\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}}{\mathrm{Sh}\,\frac{2d}{k}}\left(\mathrm{Sh}\,\frac{r+d}{k} - \mathrm{Sh}\,\frac{r-d}{k}\right)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathrm{Sh}\,\frac{m}{k} - \mathrm{Sh}\,\frac{n}{k} = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{m-n}{2k}\,.\,\mathrm{Ch}\,\frac{m+n}{2k}$$

$$\mathrm{Sh}\,\frac{2d}{k} = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k}$$

имеем:

$$R = P\,\mathrm{Ch}\,\frac{r}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Пара же будет представлена силою $N = У + Z$ или:

$$N = \frac{1}{2}(X + У)$$

Откуда по формулам (25):

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{\mathrm{Sh}\,\frac{r}{k}}{\mathrm{Sh}\,\frac{d}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Момент же полученной пары с плечем $2d$ будет:

$$M = P\,\mathrm{Sh}\,\frac{r}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

В том случае, когда $r = d$ имеем $X = P$, $У = 0$, $Z = \frac{1}{2} P$ и из формул (26), (27), (28) тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} R &= P\,\mathrm{Ch}\,\frac{d}{k} \\ N &= \frac{1}{2} \cdot P \\ M &= P \cdot \mathrm{Sh}\,\frac{d}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

В том случае, когда $r < d$ несколько лишь меняется ход рассуждения, причем конечные формулы (26), (27) и (28) остаются без изменения. В том случае когда точка 0 лежит на продолжении силы P, $r = 0$, пара эквивалентна нулю, и мы имеем одну первоначально данную силу P. Таким образом точка 0 и плечо пары $2d$ могут быть заданы совершенно произвольно и мы имеем теорему:

Всякая сила P может быть заменена силой, приложенной к произвольно выбранной точке 0 и парой с центром в этой же точке и произвольным плечем; сила, приложенная к точке 0, перпендикулярна к перпендикуляру из 0 на прямую силы P и направлена в ту же сторону, что и P, а момент полученной пары равен моменту силы P относительно точки 0. Здесь момент силы относительно точки определяется так же, как был определен момент пары т. е. моментом силы относительно точки 0 мы называем вектор 1) по величине равный произведению силы на синус гиперболический расстояния точки 0 от силы 2) перпендикулярный к плоскости заключающей точку 0 и силу P и при-

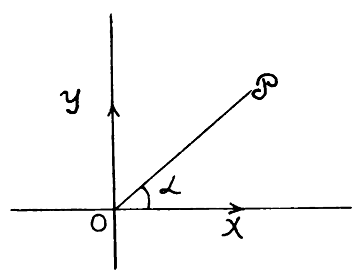
Рис. N1

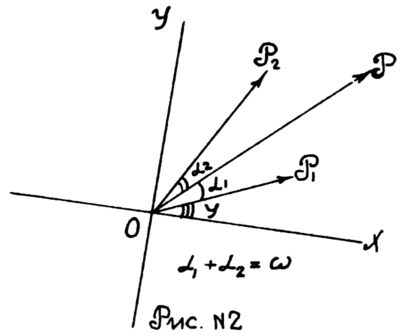
Рис. N2

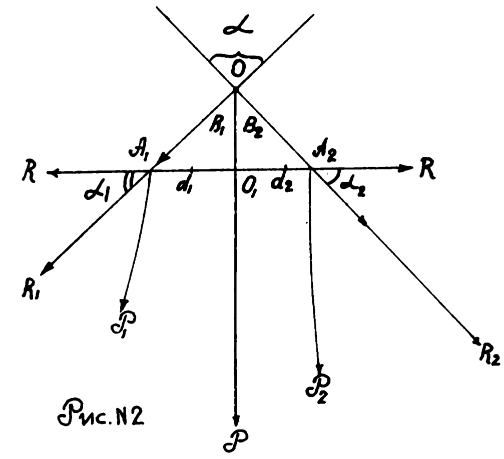
Рис. N2

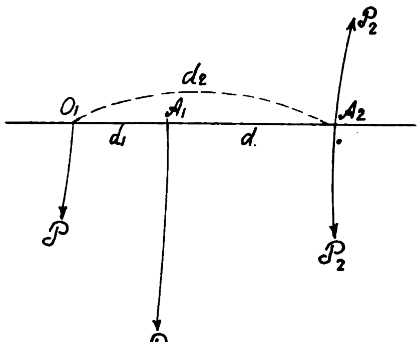
Рис. N4

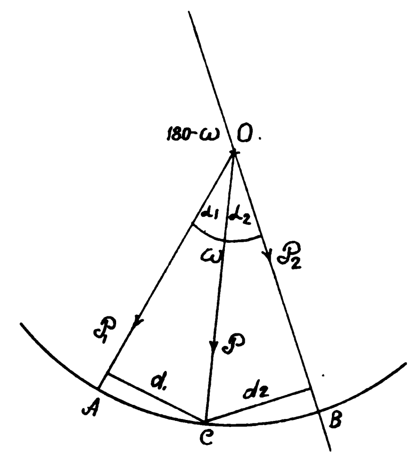
Рис. N5

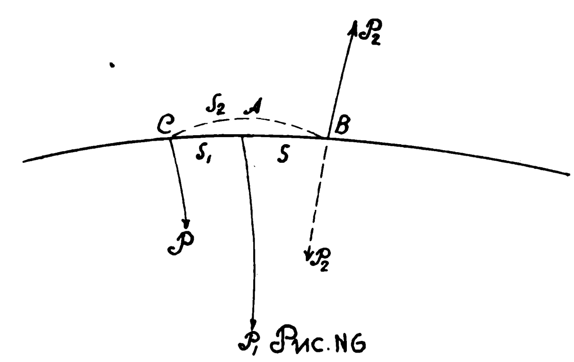
Рис. N6

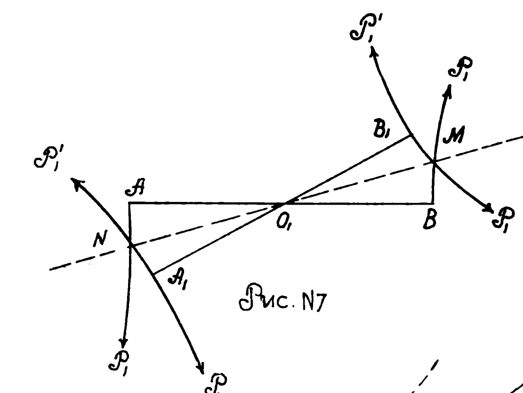
Рис. N7

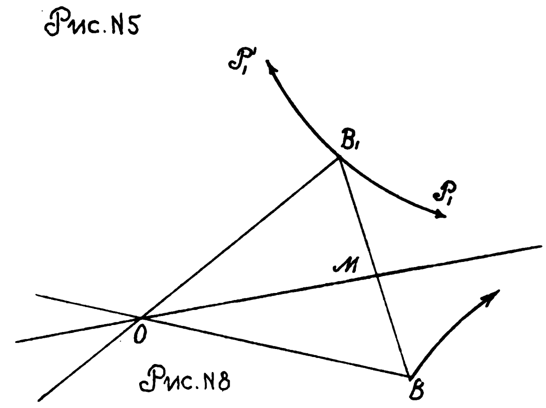
Рис. N8

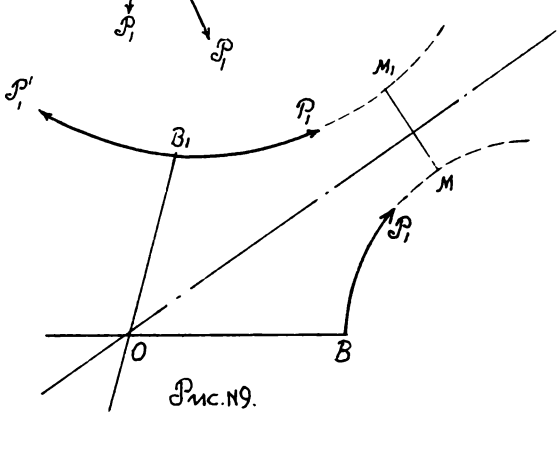
Рис. N9.

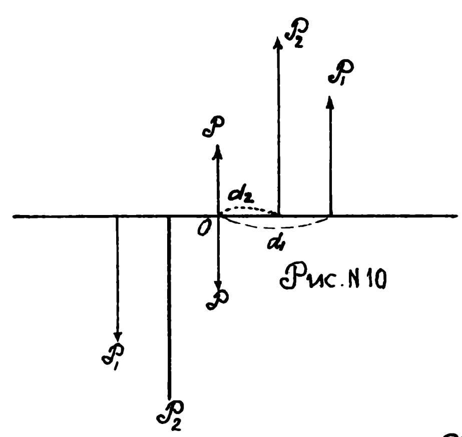
Рис. N10

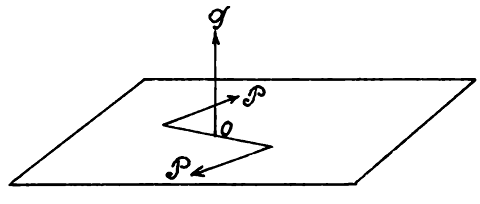
Рис. N11

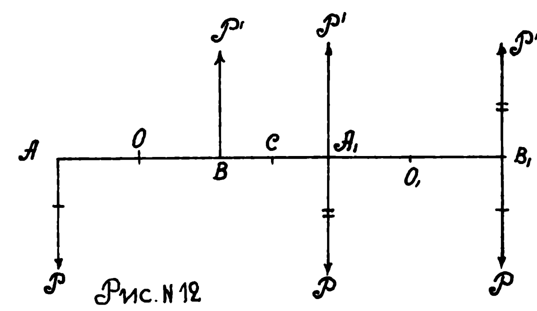
Рис. N12

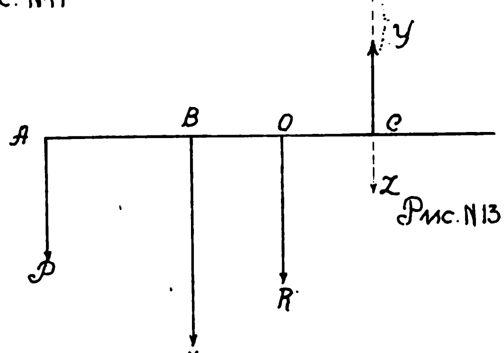
Рис. N13.

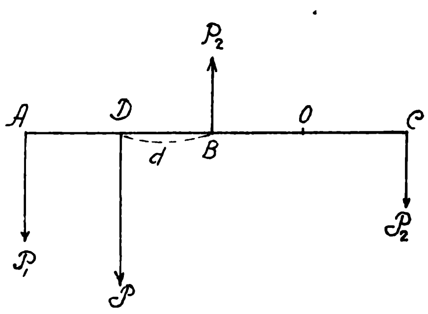
Рис. 14

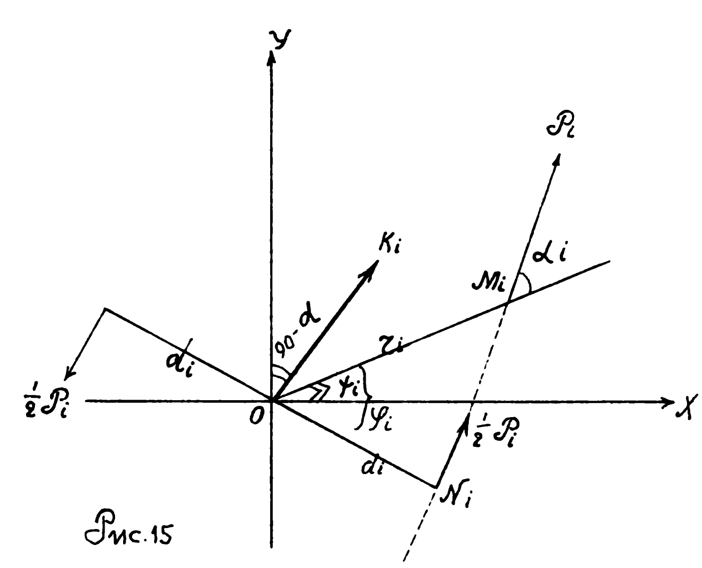
Рис. 15

ложенный к данной точке и 3) направленный так, что прямая соединяющая точку 0 с точкой двигающейся по направлению P кажется вращающейся в положительном направлении.

Теорема обратная приведенной однако не всегда справедлива. Положим, что мы имеем силу P_1 и пару P_2 с центром в 0. Путем переноса силы P_1 и поворота пары вокруг центра, получим расположение указанное на чертеже. (Рис. № 14). Можно всегда силу P_1 сложить с одинаково направленною силой P_2. Получим некоторую силу $P > P_2$ определяемую по формулам (11). Далее необходимо сложить силу P с противоположно направленной и расходящейся силою P_2. Если их кратчайшее расстояние BD обозначить через d, то из § 2 следует, что при

$$e^{\frac{d}{k}} \geq \frac{P}{P_2}$$

сложение этих двух сил невозможно. А потому невозможно и приведение силы и пары к одной силе.

Теперь на основании всего изложенного мы можем утверждать что: *совокупность сил приложенных к телу в гиперболической плоскости сводится или к силе или к паре или к силе и паре или к нулю.*

Рассмотрим теперь в общей форме задачу о приведении сил приложенных к твердому телу и расположенных в одной плоскости. Пусть к нему приложены силы P_i (Рис. № 15). Выбираем систему координат с началом в некоторой точке 0 и взаимно перпендикулярными осями X и У. Из точки 0 опускаем перпендикуляр $0N_i$ на направление силы P_i.

Обозначим Вейерштрассовы координаты точки приложения силы M_i через (x_i, y_i, p_i) и угол силы P_i с прямою $0M_i$ отсчитываемый по известным правилам, через α_i. Координаты точки M_i определяются следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \mathrm{Sh}\,\frac{x_i'}{k} \\ y_i &= \mathrm{Sh}\,\frac{y_i'}{k} \\ p_i &= \mathrm{Ch}\,\frac{r_i}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

где x_i' и y_i' длины перпендикуляров из M_i на оси У и X соответственно, а r_i — расстояние точки M_i от начала координат. Если через d_i обозначить длину перпендикуляра $0N_i$, то из прямоугольного треугольника $0N_i M_i$ имеем:

$$\mathrm{Sh}\,\frac{d_i}{k} = \mathrm{Sh}\,\frac{r_i}{k}\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha_i$$

Момент силы P_i относительно точки 0 будет:

$$M_i = P_i \operatorname{Sh}\frac{r_i}{k}\operatorname{Sin}\alpha_i \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

с соответствующим знаком. Теперь силу P_i заменяем силою приложенной в точке 0 и парой с плечем $2d_i$ и центром в 0. Обозначив искомую силу через R_i и силы составляющие пару через N_i, по формулам (29) получим:

$$\left.\begin{aligned} R_i &= P_i \operatorname{Ch}\frac{d_i}{k} \\ N_i &= \frac{1}{2}\,.\,P_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

причем момент пары N_i равен моменту силы P_i относительно точки 0 и определяется по формуле (31). Найдем составляющие силы R_i по осям X и У. Обозначив углы $M_i 0 N_i$ и $M_i 0 X$ через φ_i и ψ_i а угол силы R_i с осью x — через a, имеем:

$$a = 90 - (\varphi_i - \psi_i)$$

$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Sin}\varphi_i \operatorname{Cos}\psi_i - \operatorname{Cos}\varphi_i \operatorname{Sin}\psi_i$$

$$\operatorname{Sin} a = \operatorname{Cos}\varphi_i \operatorname{Cos}\psi_i + \operatorname{Sin}\varphi_i \operatorname{Sin}\psi_i$$

По определению Вейерштрассовых координат:

$$x_i = \operatorname{Sh}\frac{r_i}{k}\,.\operatorname{Cos}\psi_i$$

$$y_i = \operatorname{Sh}\frac{r_i}{k}\,.\operatorname{Sin}\psi_i$$

И из треугольника $M_i 0 N_i$.

$$\operatorname{Cos}\alpha_i = \operatorname{Sin}\varphi_i \operatorname{Ch}\frac{d_i}{k}$$

$$\operatorname{Cos}\varphi_i = \operatorname{Sin}\alpha_i \operatorname{Ch}\frac{m_i}{k}$$

$$\operatorname{Ch}\frac{r_i}{k} = \operatorname{Ch}\frac{d_i}{k}\,.\operatorname{Ch}\frac{m_i}{k}$$

где $m_i = M_i N_i$. Из последних двух групп формул легко получаем:

$$\operatorname{Sin}\psi_i = \frac{y_i}{\operatorname{Sh}\frac{r_i}{k}}$$

$$\operatorname{Cos}\psi_i = \frac{x_i}{\operatorname{Sh}\frac{r_i}{k}}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi_i = \frac{\operatorname{Cos}\alpha_i}{\operatorname{Ch}\dfrac{d_i}{k}}$$

$$\operatorname{Cos}\varphi_i = \frac{\operatorname{Sin}\alpha_i \operatorname{Ch}\dfrac{r_i}{k}}{\operatorname{Ch}\dfrac{d_i}{k}}$$

и наконец получаем выражения для Cos a и Sin a:

$$\operatorname{Cos} a = \frac{1}{\operatorname{Sh}\dfrac{r_i}{k} \cdot \operatorname{Ch}\dfrac{d_i}{k}} (x_i \operatorname{Cos}\alpha_i - p_i\, y_i \operatorname{Sin}\alpha_i)$$

$$\operatorname{Sin} a = \frac{1}{\operatorname{Sh}\dfrac{r_i}{k} \cdot \operatorname{Ch}\dfrac{d_i}{k}} (y_i \operatorname{Cos}\alpha_i + p_i\, x_i \operatorname{Sin}\alpha_i)$$

Составляющие X_i и $У_i$ силы R_i по осям x и y теперь определяются так:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{P_i}{\operatorname{Sh}\dfrac{r_i}{k}} (x_i \operatorname{Cos}\alpha_i - p_i\, y_i \operatorname{Sin}\alpha_i) \\ У_i &= \frac{P_i}{\operatorname{Sh}\dfrac{r_i}{k}} (y_i \operatorname{Cos}\alpha_i + p_i\, x_i \operatorname{Sin}\alpha_i) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (33)$$

Принимая во внимание, что:

$$\operatorname{Sh}\frac{r_i}{k} = \sqrt{p_i^2 - 1}$$

$$x_i^2 + y_i^2 - p_i^2 = -1$$

формулы (31) и (33) можем записать так:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{P_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} (x_i \operatorname{Cos}\alpha_i - p_i\, y_i \operatorname{Sin}\alpha_i) \\ У_i &= \frac{P_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} (y_i \operatorname{Cos}\alpha_i + p_i\, x_i \operatorname{Sin}\alpha_i) \\ M_i &= P_i \operatorname{Sin}\alpha_i \cdot \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (34)$$

По этим формулам определяются составляющие силы R_i по осям X и У и момент пары относительно точки приведения 0. Если на тело действует n сил, то равнодействующая R всех сил R_i будет иметь по осям X и У составляющие:

$$X = \sum_1^n X_i \qquad У = \sum_1^n У_i$$

а результирующая пара — момент:

$$M = \sum_{1}^{n} M_i$$

Необходимыми и достаточными условиями равновесия тела, находящегося под действием сил расположенных в плоскости, будут: [1])

$$X = 0 \quad У = 0 \quad M = 0.$$

Екатеринбург. *Н. Горин.*
1923 г.

Sur la composition des forces dans l'espace de Lobatschewsky.

Par. M. N. Gorine. Ekatherinbourg.

(R é s u m é).

L'objet de cette note est la composition des forces dans le plan hyperbolique. On établit, que les lois de composition des forces appliqueés à un même point restent les mêmes, que dans le plan euclidienne.

On va considérer la composition des forces parallèles et des forces perpendiculaires à une même droite, d'ou resultent les formules pour déterminer la grandeur et la direction d'une resultante.

On expose le théorème d' équivalence de quelques couples (du même centre) à un couple unique, dont le moment est égale à la somme des moments des couples composants.

Le paragraphe de réduction des forces contient le théorème: un système quelconque des forces appliqueés à un corps solide peut se reduire à une force ou à un couple, ou à une force et un couple, ou á zero; on etablit les formules de la réduction des forces et les conditions d' équilibre d'un corps solide.

[1]) О приведении сил в пространстве в следующем томе «Известий» Уралуниверситета.